

POSTECH 무은재학부 · 일반 모의면접 3회차

모범답안지

일반 개인과제 예상 변형문제

샘플 교재 · 코어컨택트가 만든 예상 변형문제입니다(실제 기출 아님)

주제	범위	구성
최소 시간 경로 · 빛의 굴절	미적분(미분) · 물리학I(굴절)	소문항 3개 · 꼬리질문 8개

차례

- | | |
|---------|-----------|
| 1 문제 | 2 모범답안 |
| 3 발표 순서 | 4 예상 꼬리질문 |

문제

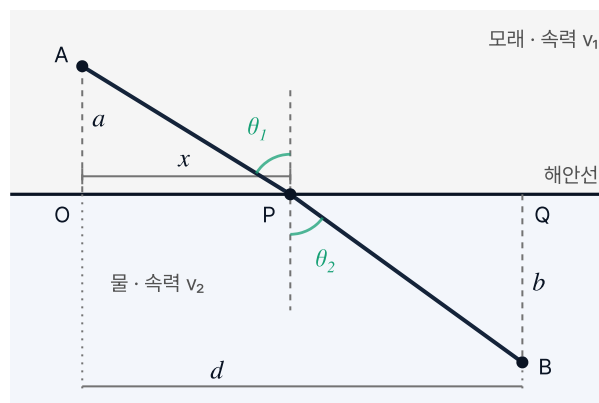
최소 시간 경로와 빛의 굴절

POSTECH 일반 개인과제 연습용으로 코어컨택트가 만든 예상 변형문제다. 실제 기출이나 공식 예시문항이 아니다. 미적분의 미분과 물리학의 빛의 굴절을 함께 쓴다.

코어컨택트 예상 변형문제 · 실제 기출 아님

구조요원이 모래사장 위의 점 A에 있고, 물에 빠진 사람이 바다의 점 B에 있다. 해안선은 직선이고 A, B에서 해안선에 내린 수선의 발을 각각 O, Q라 할 때 $AO = a$, $BQ = b$, $OQ = d$ 이다.

구조요원은 모래 위에서 속력 v_1 로 달리고 물에서 속력 v_2 로 헤엄친다 ($v_1 > v_2$). 해안선 위의 점 P까지 곧게 달린 뒤 P에서 B까지 곧게 헤엄친다.



- (1) $OP = x$ ($0 \leq x \leq d$)라 할 때, A에서 B까지 가는 데 걸리는 시간 $T(x)$ 를 구하시오.
- (2) 선분 AP, PB가 해안선에 수직인 직선과 이루는 각을 각각 θ_1 , θ_2 라 하자. $T(x)$ 가 최소가 되는 x 에서 $\sin \theta_1/v_1 = \sin \theta_2/v_2$ 가 성립함을 보이고, 이런 x 가 오직 하나임을 설명하시오.
- (3) 빛은 두 점 사이를 진행할 때 걸리는 시간이 최소인 경로를 따른다고 하자. 좌표평면에서 x 축을 공기와 물의 경계면으로 할 때, 공기 중의 점 A(0, 3)에서 나온 빛이 물속의 점 B(7, -4)에 도달한다. 공기에서 빛의 속력이 물에서의 $4/3$ 배일 때, 빛이 경계면을 지나는 점의 좌표와 굴절각의 사인값을 구하고, 이 결과를 굴절률로 해석하시오.

풀이 포인트 시간은 거리를 속력으로 나눈 값이다. 위치를 변수 하나로 두면 시간이 함수가 되고, 최소 조건은 미분으로 찾는다. (3)은 식을 직접 풀기보다 (2)의 결론을 쓴다.

다루는 개념

미적분

함성함수의 미분 · 도함수의 부호와 함수의 증가·감소 · 최댓값과 최솟값

물리학

빛의 굴절 · 굴절률 · 스넬 법칙 · 전반사

준비 시간

코어컨택트 모의면접에서는 혼자 70분 동안 풀고 발표한다(수업 구성, POSTECH 공식 시간 아님)

풀이 메모

모범답안

모범답안

(1) 시간 함수 세우기

- ① O를 원점, 해안선을 x 축, 모래 쪽을 위로 잡으면 $A(0, a)$, $B(d, -b)$, $P(x, 0)$ 이다. 시간은 거리를 속력으로 나눈 값이므로

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2} \quad (0 \leq x \leq d)$$

- ② $x < 0$ 이면 $x = 0$ 일 때보다 AP, PB가 모두 길고, $x > d$ 이면 $x = d$ 일 때보다 모두 길다. 그래서 최솟값은 $0 \leq x \leq d$ 에서 찾으면 된다.

(2) 최소 조건과 유일성

- ① 미분하고, 직각삼각형에서 $\sin \theta_1 = x/AP$, $\sin \theta_2 = (d-x)/PB$ 임을 쓰면

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

- ② 양 끝에서 $T'(0) = -d/(v_2 \sqrt{b^2 + d^2}) < 0$, $T'(d) = d/(v_1 \sqrt{a^2 + d^2}) > 0$ 이다.

- ③ x 가 커지면 θ_1 은 커지고 θ_2 는 작아지므로 $T'(x)$ 는 증가한다. 식으로 확인하면

$$T''(x) = a^2/(v_1(a^2 + x^2)^{3/2}) + b^2/(v_2(b^2 + (d-x)^2)^{3/2}) > 0$$

- ④ 따라서 $T'(x) = 0$ 인 x_0 가 $0 < x < d$ 에 오직 하나 있고, 그 왼쪽에서 $T' < 0$, 오른쪽에서 $T' > 0$ 이다. $T(x)$ 는 x_0 에서 최소이고, 이때 $\sin \theta_1/v_1 = \sin \theta_2/v_2$ 이다.

(3) 빛의 굴절에 적용

- ① $a = 3$, $b = 4$, $d = 7$ 이고 $v_1 : v_2 = 4 : 3$ 이므로 최소 조건은 $\sin \theta_1 : \sin \theta_2 = 4 : 3$ 이다.

- ② 조건식을 제곱해 정리하면 $x^4 - 14x^3 + 49x^2 - 288x + 1008 = 0$ 이어서 바로 풀기 어렵다. 길이가 정수가 되는 점을 찾으면 $x = 4$ 일 때 $AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $PB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\sin \theta_1 = 4/5$, $\sin \theta_2 = 3/5$ 로 비가 $4 : 3$ 이다.

- ③ (2)에서 조건을 만족하는 점은 하나뿐이므로 빛은 **P(4, 0)**을 지나고 굴절각의 사인값은 **3/5**이다.

- ④ 굴절률을 $n = c/v$ 로 두면 최소 조건은 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, 곧 스넬 법칙이다. 공기의 굴절률을 1로 보면 물의 굴절률은 $4/3$ 이고 $1 \times 4/5 = 4/3 \times 3/5$ 로 맞는다.

검토

- $v_1 = v_2$ 이면 $\theta_1 = \theta_2$ 여서 A, P, B가 한 직선 위에 있다. 속력이 같으면 최단 거리 경로가 곧 최소 시간 경로다.
- A와 B를 곧게 이으면 경계면의 (3, 0)을 지나고 걸리는 시간은 $25\sqrt{2}/(3c) \approx 11.79/c$ 이다. 굴절 경로는 $35/(3c) \approx 11.67/c$ 로 더 짧다.

발표

발표 순서

문제 이해	“모래와 물에서 속력이 달라 직선이 가장 빠른 길이 아닙니다. 걸리는 시간이 가장 짧아지는 P를 찾는 문제입니다.” 문제가 정한 각의 기준(해안선에 수직인 직선)과 x 의 범위를 함께 말한다.
접근	“P의 위치를 x 하나로 두면 시간이 x 의 함수가 됩니다. 미분해 최소 조건을 찾고, 그 조건을 각으로 해석하겠습니다.”
풀이	(1) $T(x)$ 와 범위의 이유 → (2) $T(x) = \sin \theta_1 / v_1 - \sin \theta_2 / v_2$, 양 끝의 부호와 증가, 최소 결론 → (3) 4 : 3 조건, $x = 4$ 대입 확인과 유일성. 칠판에는 결과 식만 쓰고 계산 과정은 말로 설명한다.
검토·확장	두 속력이 같으면 직선이 된다는 점, 직선 경로보다 시간이 짧다는 비교, 스넬 법칙과 같은 식이라는 점을 말하고 마친다.

코어컨택트 모의면접 발표 25분 기준 배분 예: 문제 이해·접근 3분, 풀이 12분, 검토·확장 3분, 남은 시간은 꼬리질문. 수업 구성이며 POSTECH 공식 시간이 아니다.

예상 꼬리질문과 답변 방향

꼬리질문	답변 방향
$T(x) = 0$ 인 점에서 최소라는 것은 어떻게 아나요?	$T(0) < 0$, $T(d) > 0$ 이고 T 이 증가하므로 부호가 음에서 양으로 한 번만 바뀐다
사차방정식을 풀지 않고 $x = 4$ 라고 해도 되나요?	대입해 조건을 확인하고, (2)의 유일성으로 다른 해가 없음을 말한다
두 속력이 같으면 경로는 어떻게 되나요?	$\theta_1 = \theta_2$, 세 점이 한 직선 위에 있다. 최단 거리 경로와 같다
빛이 물에 들어가면 진동수와 파장은 어떻게 되나요?	진동수는 그대로다. $v = f\lambda$ 에서 속력과 파장이 함께 3/4배가 된다
B에서 A로 빛을 보내면 경로는?	조건식이 같으므로 같은 경로를 거꾸로 지난다(빛의 경로는 거꾸로도 성립)
물에서 공기로 나가는 빛이 굴절하지 못하는 경우는?	공기 쪽 사인값은 물속 사인값의 4/3배이고 1을 넘을 수 없다. 물속 입사각의 사인값이 3/4보다 크면 전반사한다
빛은 최소 시간 경로를 어떻게 ‘고르나요’?	빛이 계산하는 것은 아니다. 파면의 각 부분이 매질마다 다른 속력으로 나아가 꺾인 결과가 이 조건과 같다
실제 구조 상황에 쓰면 이 모델의 한계는?	속력이 일정하다는 가정, 얇은 물에서 걷는 구간, 파도와 물살, 출발할 때의 가속을 빼고 계산했다