

수학

 $e^x \geq x + 1$ 과 $(1 + 1/n)^n < e$

연습 문항 M-3 · 코어컨택트 연습 문항 · 실제 기출 아님

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $e^x \geq x + 1$ 임을 보이고, 등호가 성립하는 x 의 값을 구하시오.
 (2) (1)을 이용하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(1 + 1/n)^n < e$ 임을 설명하시오.

풀이

- $g(x) = e^x - x - 1$ 로 둔다. 보일 것은 모든 실수 x 에서 $g(x) \geq 0$ 이라는 것이다.
- $g'(x) = e^x - 1$ 이다. e^x 는 증가함수이고 $e^0 = 1$ 이므로 $x < 0$ 에서 $g'(x) < 0$, $x > 0$ 에서 $g'(x) > 0$ 이다.
- $g(x)$ 는 $x < 0$ 에서 감소하고 $x > 0$ 에서 증가하므로 $x = 0$ 에서 최솟값 $g(0) = 0$ 을 갖는다. 따라서 $e^x \geq x + 1$ 이고, 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.
- (2) $x = 1/n$ 을 대입한다. $1/n \neq 0$ 이므로 등호는 성립하지 않고 $e^{1/n} > 1 + 1/n$ 이다.
- 양변이 모두 양수이므로 n 제곱해도 부등호의 방향은 그대로다. $(e^{1/n})^n = e$ 이므로 $(1 + 1/n)^n < e$ 이다.

구술 포인트

첫 문장 “두 식의 차를 $g(x)$ 로 두고, $g(x)$ 의 최솟값이 0임을 보이겠습니다.” 무엇을 보일지 먼저 말하고 미분을 시작한다.

조건 말하기 (2)에서 ' $1/n \neq 0$ 이라 등호가 빠진다'와 '양변이 양수라 n 제곱해도 부등호가 유지된다' 두 가지를 소리 내어 말한다. 이 두 줄을 건너뛰면 바로 꼬리질문이 나온다.

확인 답을 낸 뒤 $n = 1$ 을 넣어 $2 < e$ 가 맞는지 확인하고, 확인했다고 말한다.

관련 개념

개념	내용	쓰는 곳
함수의 최대 · 최소	도함수의 부호로 증가 · 감소를 정리한다. 한 점의 왼쪽에서 감소하고 오른쪽에서 증가하면 그 점에서 최솟값을 갖는다	풀이 2~3
부등식의 거듭제곱	$0 < a < b$ 이면 자연수 n 에 대하여 $a^n < b^n$	풀이 5
곡선의 볼록과 접선	$f''(x) > 0$ 인 구간에서 곡선은 아래로 볼록하고, 접점을 뺀 곳에서 접선보다 위에 있다	꼬리질문 1

화학

중화 반응에서 이온의 양과 농도

연습 문항 C-2 · 코어컨택트 연습 문항 · 실제 기출 아님

0.1 M 염산(HCl) 20 mL에 0.1 M 수산화 나트륨(NaOH) 수용액을 조금씩 넣었다. NaOH 수용액을 0, 10, 20, 30 mL 넣었을 때 용액 속 H^+ , Cl^- , Na^+ , OH^- 의 양과 전체 이온의 양을 구하고, 전체 이온의 몰 농도가 어떻게 변하는지 설명하시오.

풀이

- 가정: 두 물질은 모두 이온화하고, 물의 자동 이온화는 무시하며, 섞은 부피는 두 부피의 합으로 본다.
- 처음 염산에는 H^+ 2 mmol, Cl^- 2 mmol이 있다($0.1 \text{ mol/L} \times 20 \text{ mL} = 2 \text{ mmol}$).
- NaOH를 넣으면 $H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$ 만 일어난다. Na^+ 와 Cl^- 는 반응하지 않는 구경꾼 이온이다.
- 중화점(20 mL) 전에는 넣은 OH^- 만큼 H^+ 가 줄고 같은 양의 Na^+ 가 늘어 전체 이온의 양이 4 mmol로 일정하다. 중화점 뒤에는 반응할 H^+ 가 없어 넣은 Na^+ 와 OH^- 가 그대로 남으므로 전체 이온의 양이 늘어난다.
- 몰 농도 = 전체 이온의 양 ÷ 전체 부피. 중화점까지 $0.20 \rightarrow 0.10 \text{ M}$ 로 줄고, 30 mL에서 0.12 M 로 커진다.

넣은 NaOH(aq)	H^+	Cl^-	Na^+	OH^-	전체 이온(mmol)	전체 부피	전체 이온 농도
0 mL	2	2	0	0	4	20 mL	0.20 M
10 mL	1	2	1	0	4	30 mL	약 0.13 M
20 mL (중화점)	0	2	2	0	4	40 mL	0.10 M
30 mL	0	2	3	1	6	50 mL	0.12 M

구술 포인트

가정 먼저 “강산과 강염기라 모두 이온화한다고 보고, 물의 자동 이온화는 무시하며, 섞은 부피는 두 부피의 합으로 보겠습니다.”

양과 농도 중화점까지 이온의 양은 그대로이고 몰 농도만 줄어든다. 중화점 뒤에는 둘 다 늘어난다. 양과 농도를 나눠 말한다.

관련 개념

개념	내용	쓰는 곳
알짜 이온 반응식	강산과 강염기의 중화: $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$	풀이 3
몰 농도와 양	용질의 양(mol) = 몰 농도(mol/L) × 용액의 부피(L)	풀이 2, 5

꼬리질문

예상 꼬리질문과 답변 방향

풀이를 마친 뒤 이어질 수 있는 질문이다. 답변 방향에는 첫 문장으로 무엇을 말할지와 근거를 대는 순서를 적었다.

수학 · 연습 문항 M-3

꼬리질문	답변 방향
1. 이 부등식을 그래프로 설명해 보세요.	$y = x + 1$ 은 곡선 $y = e^x$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서 그은 접선이다(기울기 $e^0 = 1$). $(e^x)'' = e^x > 0$ 이라 곡선은 아래로 볼록하므로, 접점을 뺀 모든 곳에서 접선보다 위에 있다.
2. 같은 부등식에서 $\ln(1+x) \leq x$ 도 얻을 수 있나요?	$x > -1$ 이면 $1+x > 0$ 이므로 $1+x \leq e^x$ 의 양변에 자연로그를 취할 수 있다. $\ln$ 은 증가함수라 부등호가 유지되어 $\ln(1+x) \leq x$ 이고, 등호는 $x = 0$ 일 때다. 로그를 취하려면 $x > -1$ 이어야 한다는 조건을 먼저 말한다.
3. $x = -1/n$ 을 넣으면 무엇을 알 수 있나요?	$e^{-1/n} > 1 - 1/n$ 이다. $n \geq 2$ 이면 우변이 양수라 n 제곱할 수 있고 $e^{-1} > (1 - 1/n)^n$ 이다. 역수를 취하면 $(1 + 1/(n-1))^n > e$ 이다. $n-1 = m$ 으로 쓰면 $(1 + 1/m)^m < e < (1 + 1/m)^{m+1}$ 이 되어 e 를 위아래에서 잡을 수 있다.

화학 · 연습 문항 C-2

꼬리질문	답변 방향
1. 전기 전도도를 재면 이온의 양과 같은 모양의 그래프가 나오나요?	아니다. 전기 전도도는 이온의 농도와 종류에 따라 달라진다. 중화점 전에는 이온의 양이 같아도 매우 빠르게 움직이는 H^+ 가 Na^+ 로 바뀌고 부피도 늘어 전도도가 크게 줄어든다. 중화점에서 가장 작고, 그 뒤에는 Na^+ 와 OH^- 가 늘어 다시 커진다.
2. HCl 대신 같은 농도의 아세트산을 쓰면 필요한 NaOH의 양이 달라지나요?	같다(20 mL). 아세트산은 일부만 이온화하지만 OH^- 가 H^+ 를 없애면 이온화가 계속 진행되어 2 mmol이 모두 중화된다. 다만 중화점의 pH는 7보다 크다. 아세트산 이온이 물과 반응해 OH^- 를 만들기 때문이다.
3. 중화점의 pH는 언제나 7인가?	25 °C에서 강산과 강염기의 중화점은 pH 7이다. 물의 자동 이온화는 흡열 반응이라 온도가 올라가면 물의 이온곱 K_w 가 커지고, 중성 용액의 pH는 7보다 작아진다. 'pH 7 = 중성'은 25 °C 기준이라는 점을 함께 말한다.

연습 방법 꼬리질문은 답변 방향의 첫 문장을 먼저 말하고, 근거를 하나씩 붙인 뒤 조건이 있으면 마지막에 다시 짚는다.

내 답변 적어 보기

꼬리질문 하나를 골라 첫 문장과 근거를 적고, 소리 내어 말해 본다.
